

Электронный научный журнал «Век качества» ISSN 2500-1841 <https://www.agequal.ru>

2026, №1 https://www.agequal.ru/pdf/2026/AGE_QUALITY_1_2026.pdf

Ссылка для цитирования этой статьи:

Коротченко В.Д. Модели синтеза ортогональных базисных функций на основе характеристик идеального полосового фильтра // Электронный научный журнал «Век качества». 2026. №1. С. 249-263. Режим доступа: <https://www.agequal.ru/pdf/2026/126014.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 519.72

Модели синтеза ортогональных базисных функций на основе характеристик идеального полосового фильтра

Коротченко Владислав Дмитриевич,

аспирант кафедры «Электрическая связь»

Петербургского государственного университета путей сообщения

Императора Александра I

190031, Россия, г. Санкт-Петербург, пр-т Московский, 9

vladis147@mail.ru

Увеличение требований к пропускной способности каналов связи в условиях ограниченной полосы частот актуализирует вопросы повышения эффективности использования доступного спектра. Известные методы модуляции, основанные на синусоидальных функциях и их комбинациях, не позволяют в полной мере устранить межсимвольные искажения и обладают ограниченной спектральной эффективностью. **Цель работы:** повышение эффективности использования полосы канала связи в полосе тональных частот 300-3400 Гц. Для достижения цели реализованы подходы формирования базисных функций на основе импульсной и частотной характеристик идеального полосового фильтра. На их основе построены модели, позволяющие описывать передачу и приём сигналов в узкополосных каналах, исследовать влияние спектральных ограничений и условий шума, а также оценивать характеристики системы по таким параметрам, как скорость передачи, вероятность ошибок и спектральная эффективность. **Методы:** применены методы матричного анализа и компьютерного моделирования в MATLAB. Критерием завершения процедуры синтеза является достижение требуемого уровня спектральной эффективности и помехоустойчивости, подтвержденных результатами моделирования вероятности битовой ошибки (BER) в канале с аддитивным белым гауссовским шумом. **Результаты:** использование созданной модели показало возможность передачи до 66 бит за интервал 10 мс с достижением спектральной эффективности 2,2 бит/с/Гц, что в несколько раз превышает показатели классических схем модуляции. При этом вероятность битовой ошибки совпадает с теоретической кривой BPSK, что подтверждает

сохранение помехоустойчивости и высокие потенциальные возможности применения полученного ортогонального базиса для синтеза и анализа сигналов с ограниченным спектром.

Практическая значимость: разработанная модель синтеза ортогональных базисных функций позволяет увеличить канальную и спектральную эффективность передачи за счёт одновременной передачи множества ортогональных компонент в полосе 300-3400 Гц. Это обеспечивает рост скорости передачи данных без расширения спектра и делает модель востребованной как в военных приложениях, где надёжная связь критична для систем управления войсками и логистики, так и в гражданских (железнодорожный транспорт, энергетика, добывающая промышленность). Представленное решение предлагается реализовать в виде отдельного модуля для его внедрения в состав программно-аппаратных средств связи, включая модемы телефонных линий, системы ведомственной и промышленной связи и виде программного модуля для систем программно-определяемого радио.

Ключевые слова: ортогональный базис, ортонормированные функции, идеальный полосовой фильтр, синтез и анализ сигналов, цифровая обработка сигналов.

Введение

Развитие цифровой обработки сигналов и вычислительной электроники обусловило переход от классических способов формирования сигнальных алфавитов к методам синтеза ортогональных функций, ориентированных на эффективное использование ограниченной полосы частот. Базис Котельникова–Шеннона, определённый на бесконечном временном интервале, при практическом усечении приводит к ошибкам восстановления и росту межсимвольной интерференции, что стимулировало исследования конечномерных ортогональных базисов с сохранением спектральных ограничений. Начиная с конца 2000-х гг. активно развиваются численные методы синтеза таких базисов, включая конструкции временно-частотного типа (Вейля–Гейзенберга) и матричные подходы к формированию ортогональных широкополосных сигналов, позволяющие полностью заполнять заданную полосу и улучшать автокорреляционные характеристики по сравнению с классическими последовательностями [1].

С точки зрения теории информации и оптимального разложения канала известно, что предельная скорость передачи в зашумлённом канале достигается при передаче информации по взаимно ортогональным собственным модам канала. В непрерывных системах такие моды могут быть реализованы в виде синусоидальных поднесущих либо любых эквивалентных ортонормированных функций, ограниченных заданной полосой частот. Исследования показывают, что применение финитных ортогональных базисов позволяет повысить спектральную и энергетическую эффективность по сравнению с гармоническими представлениями, в том числе за счёт лучшей локализации сигналов во времени и по частоте. Это подтверждает целесообразность отказа от бесконечных разложений в пользу конечномерных приближений, более адекватных реальным условиям передачи и приёма сигналов [2].

Практическая значимость данных подходов особенно проявляется в узкополосных каналах, где спектр сигнала изначально смещён относительно нулевых частот, и в системах радиосвязи в местах пересечения их зоны обслуживания [3, 4]. Характерным примером является канал тональной частоты с полосой 300-3400 Гц, широко используемый в телекоммуникационных и транспортных системах. Оптимизация формы сигнала в таких каналах за счёт синтеза ортогональных базисов, строго ограниченных заданной полосой, позволяет снизить межсимвольную интерференцию и повысить помехоустойчивость без расширения спектра. Однако существующие модели не всегда учитывают специфику финитных сигналов и конечного интервала наблюдения, что обуславливает необходимость дальнейшего развития математических методов синтеза ортогональных базисов и анализа их статистических свойств.

Постановка задачи

В предыдущих работах авторов [5, 6] были рассмотрены принципы синтеза ортогонального базиса на конечном временном интервале на основе

финитных функций, спектрально ограниченных заданной частотой среза. В качестве базисных элементов использовались компакты, формируемые из импульсной характеристики идеального фильтра, определённой на конечном интервале времени, что обеспечивало периодичность функций и строгое ограничение их спектра. Такой подход позволяет устранить проблемы, связанные с усечением бесконечных функций типа sinc, и обеспечить ортогональность сигналов на заданном интервале наблюдения.

В настоящей работе исследуется узкополосный канал связи с параметрами, характерными для канала тональной частоты: полоса 300-3400 Гц и длительность кадра 10 мс. Частота дискретизации выбрана существенно выше полосы канала, что обеспечивает корректное представление спектра. Ортогональность базисных функций достигается за счёт их временного сдвига, равного половине периода верхней граничной частоты, что в дискретной форме соответствует фиксированному числу отсчётов. При выбранных параметрах формируется 68 ортогональных функций, из которых 66 используются для передачи информации. Это обеспечивает передачу 66 бит за один кадр и спектральную эффективность порядка 2,2 бит/с/Гц, что существенно превышает показатели классических схем без наложения сигналов. В развитие ранее предложенных подходов рассматривается синтез ортогонального компакта на основе идеального полосового фильтра с частотами среза, совпадающими с границами канала тональной частоты.

Модель синтеза ортогонального базиса на основе импульсной характеристики идеального полосового фильтра

Импульсная характеристика (ИХ) идеального полосового фильтра, приведенная в функции (3), лежит в основе предлагаемого метода синтеза ортогонального базиса, так как именно она задаёт форму временного отклика, строго ограниченного заданной полосой частот, и может быть представлена как

нормированная разность ИХ идеальных фильтров верхних частот (ФВЧ), функция (1), и нижних частот (ФНЧ), функция (2):

$$h_v(t) = \sin c \left(2fv \left(t - \left(\frac{T}{2} - \frac{k}{2fv} \right) \right) \right) \cos \left(\frac{\pi}{T} \left(\frac{T}{2} - \frac{k}{2fv} \right) \right) \quad (1)$$

$$h_n(t) = \sin c \left(2fv \left(t - \left(\frac{T}{2} - \frac{k}{2fv} \right) \right) \right) \cos \left(\frac{\pi}{T} \left(\frac{T}{2} - \frac{k}{2fv} \right) \right) \quad (2)$$

$$h_b(t) = (1 + k_n) \cdot h_v(t) - k_n \cdot h_n(t), \quad (3)$$

где: h_v – ИХ идеального фильтра верхних частот; h_n – ИХ идеального фильтра нижних частот; fv – верхняя граничная частота, fn – нижняя граничная частота, t – текущее время, T – заданный интервал времени базиса (длительность информационного кадра), k – номер базисной функции; h_b – ИХ полосового фильтра; k_n – весовой коэффициент.

Весовой коэффициент обеспечивает нормировку ИХ синтезируемого фильтра и требуемую крутизну ската АЧХ на частоте среза fn . При расчёте принят $k_n = 0,09707$, что обеспечивает нулевое среднее значение $g(t)$ на интервале $[0, T]$. Функция (3) равна нулю на концах интервала ($g(0) = g(T) = 0$) и достигает максимума $g(T/2) = 1$ в центре интервала. Таким образом, она финитна на интервале $[0, T]$ и имеет нулевую постоянную составляющую.

При изменении номера базисной функции k она сдвигается на период ортогональности, равный половине периода наивысшей частоты в спектре синтезируемого сигнала. Сам период ортогональности измеряется числом периодов используемой частоты дискретизации сигнала Fd и является целым от деления частоты дискретизации на удвоенную верхнюю граничную частоту сигнала: $sd = Fd/(2fv)$. Так, при частоте дискретизации, применяемой в ЦАП и АЦП равной $Fd = 34000$ Гц, и $fv = 3400$: $sd = 5$.

Общее количество m взаимно ортогональных базисных функций, которые могут быть размещены на интервале времени T , определится так: $m = T \cdot Fd / sd$. Для $T = 10$ мс и $sd = 5$ общее количество ортогональных базисных функций

составит $m = 66$, а это означает, что за время T при двухуровневой манипуляции можно передать 66 бит, и канальная скорость составит $Vk = 6600$ бит/с, а удельная $Vu = Vk/(fv-fn) = 2,2$ бит/с/Гц.

Для проверки ортогональности базисных функций вычисляется ковариационная матрица M , её нормированный вариант Mn , а также матрица Z , как результат перемножения матрицы Mn с её обратной. Как и следовало ожидать, матрица Z получилась единичной, что доказывает строгую ортогональность полученной системы базисных функций. В частотной области это означает, что спектры базисных функций не перекрываются, и остаточная межсимвольная интерференция отсутствует.

На рис. 1 приведены графики ИХ предлагаемого идеального полосового фильтра и график его АЧХ. Из графиков видно, что АЧХ ограничена в полосе 300-3400 Гц, а импульс во временной области имеет колоколообразную форму и затухает к границам интервала.

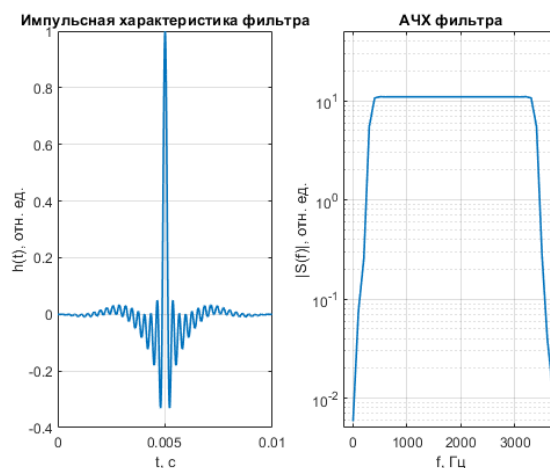


Рис. 1. ИХ полосового фильтра для канала ТЧ и его АЧХ для $T=10$ мс

На рис. 2 приведены графики первых двух базисных функций при номерах $k = 1$ и $k = 2$.

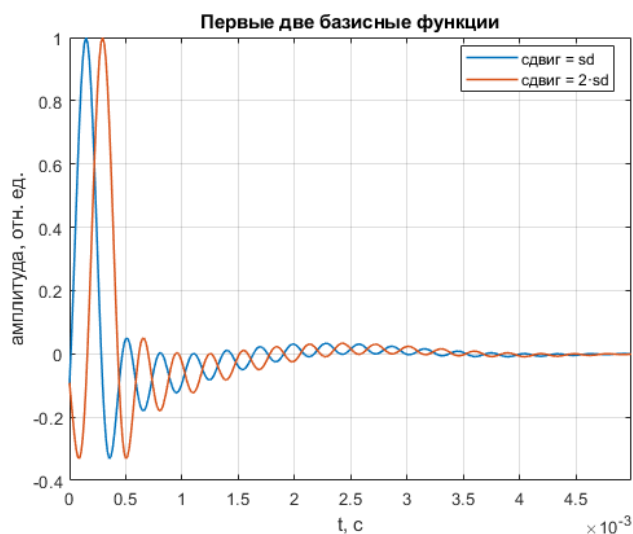


Рис. 2. График первых 2-х базисных функций

На рис. 2 видно, что базисные функции являются периодическими.

Таким образом, метод синтеза ортогонального базиса на основе ИХ идеального полосового фильтра обеспечивает формирование системы взаимно ортогональных функций, ограниченных во времени и спектре, что подтверждается приведёнными графиками. Далее данный подход будет сопоставлен со способом синтеза на основе частотной характеристики фильтра, а также использован при моделировании передачи сигнала в полосе канала ТЧ.

Модель синтеза ортогонального базиса по АЧХ идеального полосового фильтра

Альтернативный подход к синтезу базисных функций основывается на формировании требуемой АЧХ идеального полосового фильтра в дискретной области частот и последующем получении ИХ через обратное преобразование Фурье. При отображении дискретного преобразования Фурье реального сигнала нужно учитывать наличие симметричной спектральной компоненты: основной спектр сигнала расположен в диапазоне от fn до fv , а дополнительный (мнимосопряжённый) спектр появляется в полосе от $Fd - fv$ до $Fd - fn$. Это схоже с амплитудной модуляцией (сигналом с полосой $[fn fv]$) поднесущей $Fd/2$ при

подавленной несущей. Таким образом, целевой дискретный спектр $W[k]$ длины N должен содержать ненулевые значения на отрезках индексов, соответствующих обоим полосам пропускания фильтра. В нашем случае при $N = 680$ отсчётах и $T = 10$ мс индексы спектра, отвечающие полосе 300-3400 Гц, находятся примерно в диапазоне $k = 3$ до $k = 34$ (для положительной полуволны), а симметричная полоса – в диапазоне $k =$ от 646 до 676 (соответствует частотам от $F_d - f_v$ до $F_d - f_n$). На этих интервалах индексов задаётся некоторое постоянное значение амплитуды A . Значение A выбирается исходя из условий нормировки по времени – в частности, используется $A = 5,48$ для обеспечения требуемой крутизны и амплитуды импульса.

$$W[k] = \begin{cases} A & k \in [f_n T, f_v T) \cup ((F_d - f_v) T, (F_d - f_n) T) \\ 10^{-16} & \text{иначе} \end{cases} \quad (4)$$

В выражении (4) малое ненулевое значение $10^{(-16)}$ используется вместо нуля для исключения артефактов вычисления БПФ (Быстрое преобразование Фурье).

Применив ОБПФ (Обратное быстрое преобразование Фурье) к сформированному массиву $W[k]$, получаем импульсную характеристику фильтра $h(t)$ в дискретном представлении. Для удобства центрируем её по середине отсчётов (сдвигом на $N/2$). Импульсная характеристика идеального полосового фильтра оказывается синусоидальным затухающим колебанием, растянутым на всём интервале T . Чтобы получить финитную импульсную характеристику с нулевыми концами, необходимо принять значения $h(t)$ вне основного центрального максимума равными нулю. В данной модели значимые отсчёты в интервале индексов $[116, 226]$, вне этого окна устанавливаем $h(t) = 10^{(-4)}$. Это соответствует временной ширине главного лепестка порядка 110 отсчётов (около 1,6 мс). Остаточные боковые лепестки за пределами окна подавляются до низкого уровня $10^{(-4)}$, минимизируя межсимвольные эффекты при наложении импульсов. На рис. 3 показаны основная спектральная полоса канала ТЧ без помех и ИХ, полученная обратным преобразованием Фурье с

усечением боковых лепестков. Как видно, импульс сосредоточен в заданном интервале времени и имеет колебательную форму. Различие между двумя методами синтеза (по времени и по частоте) состоит лишь в деталях нормировки: оба подхода приводят к базису, удовлетворяющему критериям ограниченности и ортогональности.

На рис. 3 приведены результаты моделирования на основе программы на языке Matlab полоса пропускания идеального полосового фильтра с граничными частотами канала ТЧ и результат его обратного Фурье преобразования.

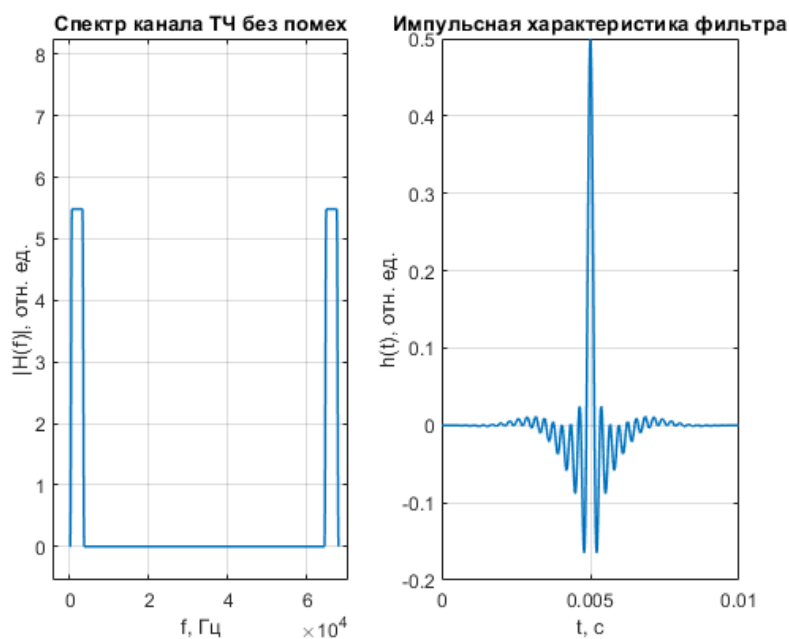


Рис. 3. Спектр канала ТЧ без помех и ИХ полученная ОБПФ

По графикам (рис. 3) видно, что полученный сигнал удовлетворяет заданным ограничениям: АЧХ равна единице на рабочей полосе 300-3400 Гц и практически равна нулю вне её; импульсная характеристика во времени занимает около 1,6 мс внутри окна и мала на остальном интервале $T = 10$ мс. Такой импульс может служить порождающей функцией ортогонального базиса,

как было показано ранее (сдвиги на $sd = 10$ отсчётов генерируют ортогональные реализации).

В следующей модели был использован способ синтеза базисной функции, указанный на основе импульсной характеристики идеального полосового фильтра, поскольку он автоматически удовлетворяет граничным условиям, а метод синтеза по частотной характеристике описан для верификации и иллюстрации.

Моделирование полученного метода синтеза ортогонального базиса на основе импульсной характеристики идеального полосового фильтра

Для подтверждения работоспособности предложенного базиса было проведено компьютерное моделирование процесса передачи данных в полосе тональной частоты с использованием разработанных ортогональных сигналов [7]. Генерировалась случайная двоичная информационная последовательность длиной 66 бит (соответствует $m-2=66$ информационным символам на кадр). Каждый бит (0 или 1) сопоставлялся одному из двух уровней амплитуды (-1; +1) согласно бинарной манипуляции BPSK. Информационные символы одновременно модулировали $m-2$ ортогональных базисных функций $gk(t)$, $k=1.66$, которые накладывались во времени, образуя суммарный передаваемый сигнал $s(t)$. Длительность кадра равна $T=10$ мс, после чего процесс повторяется для следующего блока бит. На приёмной стороне реализован согласованный фильтр на основе тех же базисных функций: принятый сигнал скалярно умножается на каждый из базисных векторов $gk(t)$, что по ортогональному свойству должно выделить соответствующий символ bk .

Моделирование процесса синтеза сигнала в полосе канала ТЧ с аддитивным белым гауссовским шумом, содержащего некоторую информацию и декодирование полученных сигналов с целью восстановления этой информации, велось на основе программы на языке Matlab. Программа реализует численный эксперимент для канала ТЧ с ограниченной полосой, в

котором двоичный поток передаётся по ортонормированному базису, синтезированному из импульсной характеристики идеального полосового фильтра. Алгоритм последовательно:

- 1) задаёт параметры полосы/дискретизации и «регуляторы шума»;
- 2) строит порождающий импульс и формирует из него матрицу базисных функций сдвигами;
- 3) ортонормирует базис (единичная энергия столбцов, взаимная ортогональность);
- 4) синтезирует кадр, выполняет идеальный приём и моделирует влияние АБГШ (Аддитивный белый гауссовский шум) в решающем домене;
- 5) оценивает BER (Монте-Карло) и выводит производные метрики: «полезную скорость» и спектральную эффективность;
- 6) визуализирует этапы: кадр, базис, спектр, BER-кривые, скорости/эффективность.

В текущей версии модель использует только двоичную модуляцию, канал АБГШ без памяти, добавление шума в решающем домене. Многолучевое распространение, замирания, рассинхронизация несущей и канальное кодирование не учитываются – их анализ планируется в следующих этапах исследования.

Результаты моделирования синтеза ортогонального базиса на основе импульсной характеристики идеального полосового фильтра представлены на рис. 4-6.

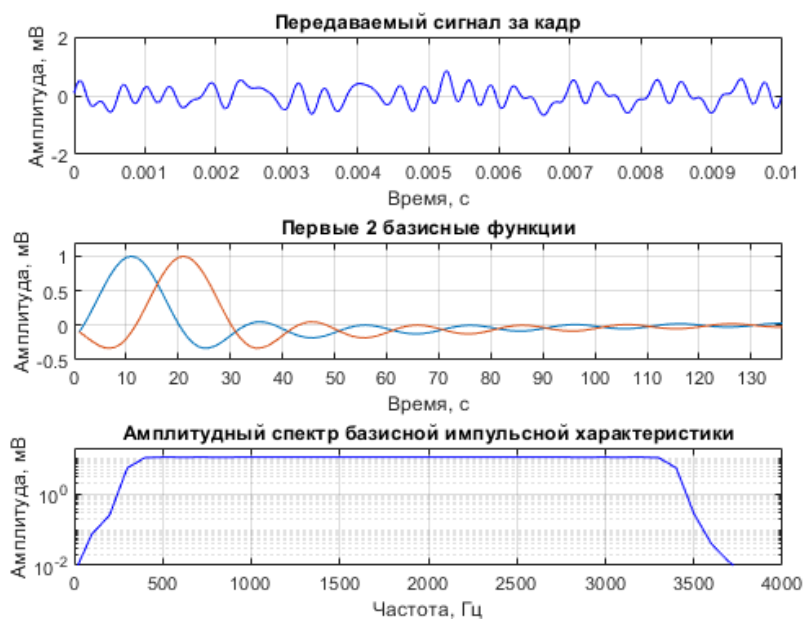


Рис. 4. Синтез базиса на основе ИХ идеального полосового фильтра канала ТЧ:
(а) Верхний график – передаваемый сигнал за один кадр;
(б) Средний график – первые две ортонормированные базисные функции;
(в) Нижний график – АЧХ полосового фильтра

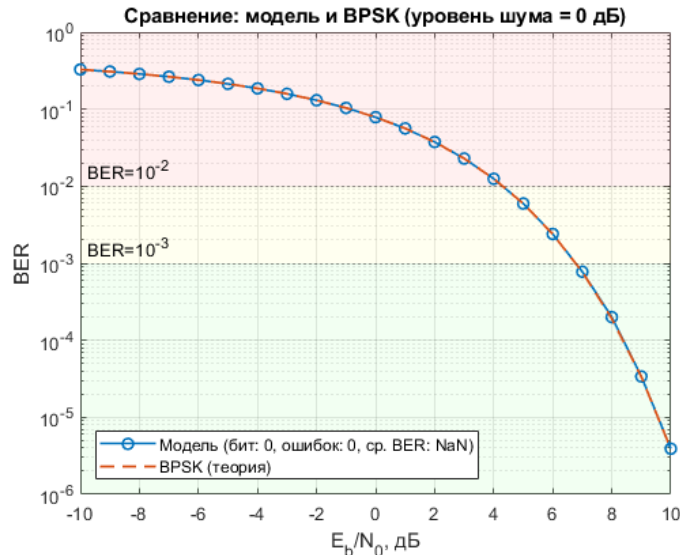


Рис. 5. Результаты моделирования предложенного базисного и теоретическая кривая BPSK в AWGN; показаны эксплуатационные зоны по уровням BER; приведена теоретическая кривая – по формулам для BPSK при АБГШ

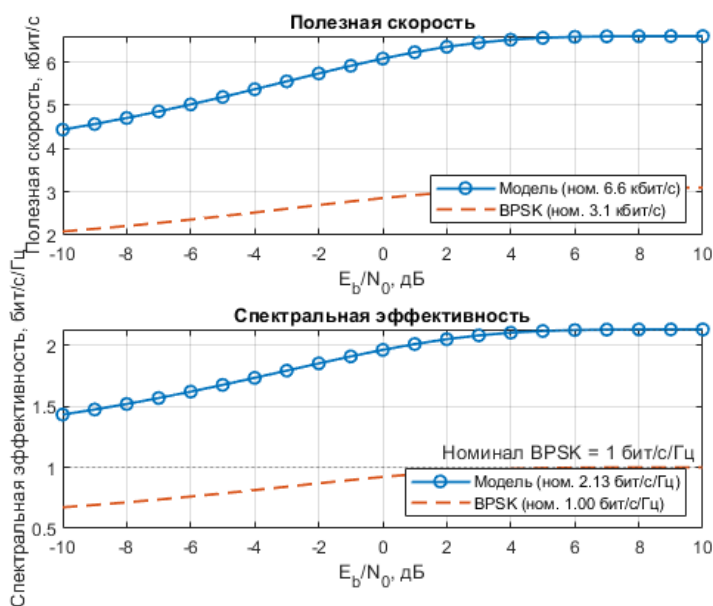


Рис. 6. (а) Верхний график – полезная скорость передачи в кбит/с для модели и эталонной BPSK;
(в) Нижний график – спектральная эффективность в бит/с/Гц для модели и BPSK с ориентирами по номинальным значениям

В перспективе планируется расширить и адаптировать разработанный базис для более сложных условий и систем. Одно из направлений – адаптация базиса к каналам с переменной полосой пропускания. В реальных сетях частотные диапазоны могут изменяться (например, при перестройке канала или отличиях стандартов), поэтому актуальна задача синтеза ортонормированных функций, способных динамически подстраиваться под доступную полосу. Возможен подход с мгновенным вычислением базиса при изменении полосы или использование банка предвычисленных базисов для разных диапазонов.

Список литературы

1. Егоров В.В., Лобов С.А., Ходаковский В.А. Синтез последовательностей с идеальными автокорреляционными свойствами // Автоматика на транспорте. – 2022. – Т. 8, № 11. – С. 78-89.
2. Жук А.П., Стогний К.В., Копытов В.В., Макаров И.В. Методика получения ансамблей дискретных ортогональных кодовых последовательностей с

- улучшенными автокорреляционными функциями // Системы управления, связи и безопасности. – 2025. – № 1. – С. 48-78.
3. Лобеев Д.П., Билятдинов К.З. Научно-технические предложения по проектированию радиосетей стандарта LTE-1800 TDD // Электронный научный журнал «Век качества». – 2025. – № 2. – С. 301-312. – Режим доступа: <https://www.agequal.ru/pdf/2025/225014.pdf> (доступ свободный).
 4. Лобеев Д.П., Гриценко А.А., Билятдинов К.З. Применение комплекса моделей проектирования цифровых сетей в местах пересечения с другими цифровыми системами железнодорожного транспорта стандарта LTE-1800 TDD // Электронный научный журнал «Век качества». – 2025. – № 3. – С. 183-197. – Режим доступа: <https://www.agequal.ru/pdf/2025/325012.pdf> (доступ свободный).
 5. Ходаковский В.А., Коротченко В.Д. Анализ и синтез ортогонального базиса на конечном временном интервале для цифровой обработки сигналов с ограниченным спектром // Современное состояние и перспективы развития инфокоммуникационных сетей связи спецназначения: сборник научных трудов. – Санкт-Петербург, 2025. – С. 234-238.
 6. Ходаковский В.А., Коротченко В.Д. Синтез ортогонального базиса на конечном временном интервале для цифровой обработки сигналов с ограниченным спектром // Интеллектуальные технологии на транспорте. – 2025. – № 2 (42). – С. 71-82. – DOI: 10.20295/2413-2527-2025-242-71-82.
 7. Ходаковский В.А., Коротченко В.Д. Способ синтеза ортогонального базиса для передачи цифровой информации в узкополосном канале связи с воздействием аддитивного белого гауссовского шума: Свидетельство о регистрации программы на ЭВМ. № 2025687085.

Models for the Synthesis of Orthogonal Basis Functions Based on the Characteristics of an Ideal Band-Pass Filter

Korotchenko Vladislav Dmitrievich,

*Postgraduate student of the Department of Electrical Communications
Emperor Alexander I Petersburg State University of Railway Engineering
190031, St. Petersburg, Moskovsky Ave., 9
<mailto:vladis147@mail.ru>*

The growing requirements for the throughput of communication channels under limited frequency bandwidth conditions make the problem of improving spectrum utilization efficiency increasingly relevant. Conventional modulation techniques based on sinusoidal functions and their combinations are unable to fully eliminate intersymbol interference and are characterized by limited spectral efficiency. **Objective.** The aim of this work is to increase the efficiency of bandwidth utilization in communication channels operating within the voice-frequency band of 300–3400 Hz. To achieve this goal, approaches for forming basis functions based on the impulse response and frequency response of an ideal band-pass filter are implemented. On this basis, models are developed that describe signal transmission and reception in narrowband channels, allow investigation of the effects of spectral constraints and noise conditions, and enable evaluation of system performance in terms of data rate, bit error probability, and spectral efficiency. **Methods.** Matrix analysis methods and computer simulations in MATLAB are employed. The synthesis procedure is considered complete when the required levels of spectral efficiency and noise immunity are achieved, as confirmed by bit error rate (BER) simulations in an additive white Gaussian noise (AWGN) channel. **Results.** Application of the developed model demonstrates the possibility of transmitting up to 66 bits within a 10 ms interval while achieving a spectral efficiency of 2.2 bit/s/Hz, which exceeds the performance of classical modulation schemes by several times. At the same time, the obtained BER coincides with the theoretical BPSK curve, confirming the preservation of noise immunity and the high potential of the proposed orthogonal basis for the synthesis and analysis of band-limited signals.

Keywords: orthogonal basis, orthonormal functions, ideal band-pass filter, signal synthesis and analysis, digital signal processing.