

Электронный научный журнал «Век качества» ISSN 2500-1841 <https://www.agequal.ru>

2026, №2 [https://www.agequal.ru/pdf/2026/AGE\\_QUALITY\\_2\\_2026.pdf](https://www.agequal.ru/pdf/2026/AGE_QUALITY_2_2026.pdf)

**Ссылка для цитирования этой статьи:**

Коротченко В.Д. Математическая модель корреляционного приёма сигналов на основе ортогонального базиса финитных функций в канале с аддитивным белым гауссовским шумом // Электронный научный журнал «Век качества». 2026. №2. С. 348-359. Режим доступа: <https://www.agequal.ru/pdf/2026/226022.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.

УДК 519.72

**Математическая модель корреляционного приёма сигналов  
на основе ортогонального базиса финитных функций  
в канале с аддитивным белым гауссовским шумом**

*Коротченко Владислав Дмитриевич,  
аспирант кафедры «Электрическая связь»  
Петербургский государственный университет  
путей сообщения Императора Александра I  
190031, г. Санкт-Петербург, пр-т Московский, 9  
[vladis147@mail.ru](mailto:vladis147@mail.ru)*

Разработана формальная математическая модель процесса демодуляции информационных сигналов, синтезированных на основе ортогонального базиса финитных функций. Приёмник описывается как линейный матричный коррелятор, через ковариационную матрицу которого доказана пренебрежимо малая межсимвольная интерференция (МСИ). Получены приближённые аналитические выражения для вероятности ошибки на бит при различных размерностях базиса. Введён коэффициент биортогональных потерь, аналитически объясняющий отклонение кривой BER от теоретической BPSK-границы.

**Ключевые слова:** ортогональный базис; финитные функции; корреляционный приёмник; межсимвольная интерференция; BER; BPSK; канал АБГШ.

**Введение**

В предыдущих работах автора [1, 2] был синтезирован ортогональный базис финитных функций на конечном временном интервале для передачи информации по узкополосным каналам связи. Показано, что ковариационная матрица базисов синтеза и анализа с точностью до  $10^{-4}$  совпадает с единичной

матрицей, что означает практическое отсутствие межсимвольной интерференции (МСИ). Вместе с тем строгое математическое обоснование этого результата и аналитическое выражение вероятности ошибки на бит ранее не были формализованы.

Вейвлетные подходы к построению сигнальных базисов с хорошей частотно-временной локализацией развиваются в работах В.П. Волчкова [3], однако они ориентированы преимущественно на анализ сигналов, а не на синтез передающих конструкций. А.Ю. Гришенцев [4] предложил метод синтеза алфавитов ортогональных широкополосных сигналов на основе упаковки векторов на гиперсфере, обеспечивающий заполнение заданной полосы и улучшение автокорреляционных характеристик. В.А. Вершинин в работе [5] провёл сравнение двух схем ортогонализации – на основе SVD-разложения и на основе матрицы Адамара – с точки зрения помехоустойчивости к импульсной помехе и показал, что схема Адамара обладает лучшей устойчивостью за счёт более равномерного распределения во времени огибающих сигнальных функций.

Проблема синтеза ортогональных базисов, ограниченных одновременно по времени и по частоте, активно исследуется в контексте повышения спектральной эффективности систем передачи.

Цель работы: построить математическую модель процесса демодуляции информационных сигналов, синтезированных на основе ортогонального базиса финитных функций.

Практическая значимость применения ортогональных базисных функций состоит в увеличении скорости передачи данных, что особенно актуально при проектировании сетей радиосвязи в условиях высокоскоростного движения [6].

### **Постановка задачи**

Ранее [1, 2] были рассмотрены принципы синтеза ортогонального базиса финитных функций на конечном временном интервале  $T$ , спектрально

ограниченных заданной верхней граничной частотой  $f_v$ . В качестве базисных элементов использовались компакты, формируемые из импульсной характеристики идеального фильтра низких частот, определённой на конечном интервале времени, что обеспечивало финитность функций и строгое ограничение их спектра.

Вместе с тем в указанных работах рассматривалась только передающая сторона: синтез базиса, формирование сигнала и численная проверка ортогональности. Приёмная сторона – демодуляция сигнала, вероятность ошибки на бит в канале с шумом – формально не анализировалась.

Настоящая работа строит формальную матричную модель линейного корреляционного приёмника, в которой принятый сигнал описывается выражением  $\hat{A} = Ga^T y$ , явно разделяющим полезный сигнал, межсимвольную интерференцию и шум. Доказывается теорема о нулевой МСИ при  $Z = I$  и оценивается остаточная МСИ для реального базиса. Получается приближённое замкнутое выражение для вероятности ошибки на бит через коэффициент биортогональных потерь  $\chi = \|gk\|^2 \cdot \|gak\|^2$ , характеризующий энергетическую цену использования неортонормированного анализирующего базиса.

### Матричная модель передачи и приёма сигналов

Пусть передаётся последовательность информационных бит  $bk \in \{0, 1\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m - 1$ , которые отображаются в двоичные символы *BPSK*:  $ak = 2bk - 1 \in \{-1, +1\}$ . Передатчик формирует сигнальный вектор в соответствии с матричной операцией синтеза:

$$s = G \cdot a, \quad (1)$$

где:  $s \in \mathbb{R}^N$  – сигнальный вектор, представляющий передаваемый кадр;  $G \in \mathbb{R}^{N \times m}$  – матрица базиса синтеза с элементами  $G_{i,k} = \phi_k(i/Fd)$ , составленная из  $m$  финитных базисных функций, дискретизированных с частотой  $Fd$ ;  $a = [a_0, a_{m-1}]^T$  – вектор информационных символов *BPSK*;  $N$  – число отсчётов на интервале  $T$ ,

$N = T Fd$ ;  $m$  – размерность базиса (число передаваемых бит за один кадр);  $Fd$  – частота дискретизации.

Принятый вектор отсчётов формируется в канале с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ):

$$y = s + n = G a + n, \quad (2)$$

где:  $y \in \mathbb{R}^N$  – принятый вектор отсчётов;  $n \sim N(0, \sigma^2 I_n)$  – дискретный вектор шума с нормальным распределением;  $\sigma^2 = N_0 \cdot Fd/2$  – дисперсия шума на один отсчёт при идеальной антиалиасинговой фильтрации в полосе  $[0, Fd/2]$ ;  $N_0/2$  – односторонняя спектральная плотность мощности шума.

В канале АБГШ оптимальным по критерию максимального правдоподобия (ML) является детектор  $\hat{a}_{ML} = \operatorname{argmin} \|y - G \cdot a\|^2$ . При ортонормированном базисе ( $G^T G = I$ ,  $G a = G$ ) ML-детектор сводится к корреляционному приёмнику. В данной работе рассматривается линейный корреляционный приёмник:

$$\hat{A} = G a^T y, \quad (3)$$

где:  $\hat{A} \in \mathbb{R}^m$  – вектор статистик решений (оценки переданных символов);  $G a \in \mathbb{R}^{N \times m}$  – матрица базиса анализа (согласующий фильтр) с элементами  $(G a)_{i,k} = \psi k(i/Fd)$ .

При  $Z = I$  и  $\Phi = I$  коррелятор (3) совпадает с ML-детектором. В общем случае ( $Z \approx I$ ,  $\Phi \approx I$ ) он является субоптимальным, а потери относительно ML-детектора характеризуются коэффициентом  $\chi \geq 1$ , определяемым ниже.

Подставляя (2) в (3), получим разложение статистики решений на три составляющие:

$$\hat{A} = G a^T (G a + n) = Z \cdot a + \eta, \quad (4)$$

где:  $Z = G a^T \cdot G \in \mathbb{R}^{m \times m}$  – матрица взаимной корреляции базисов анализа и синтеза (матрица передачи символов); элемент  $Z_{kj} = g a, k^T \cdot g j$  представляет собой дискретное скалярное произведение  $k$ -й аналитической функции с  $j$ -й синтетической;  $\eta = G a^T \cdot n \in \mathbb{R}^m$  – шумовая составляющая решения;  $Z \cdot a$  – полезный сигнал, включающий МСИ через недиагональные элементы  $Z$ .

Выражение (4) является центральным результатом модели. Оно явно разделяет полезный сигнал, межсимвольную интерференцию и шум в аналитической форме, пригодной для дальнейшего анализа.

### Межсимвольная интерференция и статистические свойства шума

*Определение МСИ.* Для  $k$ -го символа вектор межсимвольной интерференции определяется как:

$$\varepsilon_k = \sum_{(j \neq k)} Z_{kj} \cdot a_j + (Z_{kk} - 1) \cdot a_k, \quad (5)$$

где:  $\varepsilon_k$  – компонента МСИ для  $k$ -го символа;  $Z_{kj}$  – элемент матрицы передачи символов, характеризующий вклад  $j$ -го переданного символа в  $k$ -ю статистику решения;  $a_j$  –  $j$ -й переданный информационный символ.

*Теорема (нулевая МСИ).* Если матрица передачи символов  $Z = Ga^T \cdot G = Im$  (единичная матрица), то  $\varepsilon_k = 0$  для всех  $k = 0, m - 1$ .

*Доказательство.* При  $Z = Im$  выполняется  $Z_{kj} = \delta_{kj}$  (символ Кронекера). Подставляя в (5):  $\varepsilon_k = \sum_{(j \neq k)} 0 \cdot a_j + (1 - 1) \cdot a_k = 0$ . При этом вектор решений (4) принимает вид:

$$\hat{A} = a + \eta, \quad (6)$$

то есть оценка каждого символа равна переданному значению плюс гауссовская помеха.

Теорема доказана для идеального случая  $Z = I$ . Для синтезированного базиса выполняется  $Z \approx I$  (см. таблицу 1), и МСИ является не нулевой, а пренебрежимо малой. Количественная оценка приведена ниже.

При ненулевых внедиагональных элементах остаточная МСИ ограничена сверху:

$$\|\varepsilon\|_2 \leq \|Z - Im\|_F \sqrt{m}, \quad (7)$$

где:  $\|\cdot\|_F$  – норма Фробениуса матрицы;  $m$  – размерность базиса.

Для оценки практической значимости остаточной МСИ в таблице 1 приведена ковариационная матрица базисов синтеза и анализа размерности  $m =$

8, полученная при частоте дискретизации  $Fd = 60$  кГц и верхней граничной частоте  $f\nu = 3$  кГц.

Таблица 1

Ковариационная матрица  $Z$  базисов синтеза и анализа ( $m = 8$ )

$k \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,0000	$5,1e^{-4}$	$-3,5e^{-4}$	$2,5e^{-4}$	$-1,9e^{-4}$	$1,4e^{-4}$	$-8,5e^{-5}$	$\approx 0$
2	$5,1e^{-4}$	1,0003	$-1,8e^{-4}$	$1,2e^{-4}$	$-8,1e^{-5}$	$4,5e^{-5}$	$\approx 0$	$-8,5e^{-5}$
3	$-3,5e^{-4}$	$1,8e^{-4}$	0,9999	$6,4e^{-5}$	$-3,2e^{-5}$	$\approx 0$	$4,5e^{-5}$	$-1,4e^{-4}$
4	$2,5e^{-4}$	$-1,2e^{-4}$	$6,4e^{-5}$	1,0000	$\approx 0$	$-3,2e^{-5}$	$8,1e^{-5}$	$-1,9e^{-4}$
5	$-1,9e^{-4}$	$8,1e^{-5}$	$-3,2e^{-5}$	$\approx 0$	1,0000	$6,4e^{-5}$	$-1,2e^{-4}$	$2,5e^{-4}$
6	$1,4e^{-4}$	$-4,5e^{-5}$	$\approx 0$	$-3,2e^{-5}$	$6,4e^{-5}$	0,9999	$1,8e^{-4}$	$-3,5e^{-4}$
7	$-8,5e^{-5}$	$\approx 0$	$4,5e^{-5}$	$-8,1e^{-5}$	$1,2e^{-4}$	$1,8e^{-4}$	1,0003	$-5,1e^{-4}$
8	$\approx 0$	$-8,5e^{-5}$	$1,4e^{-4}$	$-1,9e^{-4}$	$2,5e^{-4}$	$-3,5e^{-4}$	$5,1e^{-4}$	1,0000

Диагональные элементы  $\approx 1$ , внедиагональные порядка  $10^{-4}$ – $10^{-5}$ .

Максимальный внедиагональный элемент  $|Z_{kj}| \leq 5,1 \cdot 10^{-4}$ , откуда для  $k$ -й компоненты МСИ:  $|\epsilon_k| \leq (m-1) \cdot \max|Z_{kj}| \leq 3,6 \cdot 10^{-3}$ . При  $Eb/N0 = 6,8$  дБ ( $BER = 10^{-3}$ ) стандартное отклонение шума  $k$ -й компоненты  $\sigma\sqrt{\phi_k} \approx 0,46$ , следовательно  $|\epsilon_k|/(\sigma\sqrt{\phi_k}) \leq 7,8 \cdot 10^{-3}$  – МСИ составляет менее 0,8 % от уровня шума для каждой компоненты. Для других значений  $m$  при аналогичных условиях порядок величины аналогичен.

Вектор шума на выходе коррелятора  $\eta = Ga^T \cdot n$  имеет многомерное нормальное распределение:

$$\eta \sim N(0, \sigma^2 \Phi), \quad \Phi \neq I, \quad (8)$$

где:  $\Phi = Ga^T \cdot Ga \in \mathbb{R}^{m \times m}$  – матрица Грама аналитических базисных функций, которая отличается от  $Z = Ga^T \cdot G$  – так как это разные матрицы, поскольку  $Ga \neq G$ ;  $\phi_k = \|ga, k\|^2$  – диагональный элемент матрицы  $\Phi$ , определяющий дисперсию шума для  $k$ -й компоненты.

Поскольку  $\Phi \neq I$ , компоненты шума не являются независимыми – они слабо коррелированы. Матрица  $\Phi$  требует отдельного вычисления (не совпадает с  $Z$ );

для базиса  $m = 8$ :  $\|\Phi - \mathbb{L}F \approx 5 \cdot 10^{-4}$ . При  $\|\Phi - \mathbb{L} \ll 1$  пренебрежение внедиагональными элементами обосновано, и формула  $BER$ , полученная ниже, является приближением с погрешностью порядка  $\|\Phi - \mathbb{L}F$ .

### Аналитическое выражение вероятности ошибки на бит

Из выражений (6) и (8) следует, что  $k$ -я статистика решений при пренебрежении внедиагональными элементами  $\Phi$  и остаточной МСИ имеет приближённый вид:

$$\hat{A}k \approx ak + \eta k, \quad \eta k \sim N(0, \sigma^2 \cdot \varphi k), \quad (9)$$

Для синтеза базиса согласно формуле (9) и расчету из неё выражение  $BER$ , приняты следующие допущения: значения остаточной МСИ ( $\|Z - \mathbb{L}F \approx 1,26 \cdot 10^{-3} \ll 1$ ), межкомпонентной корреляции шума ( $\|\Phi - \mathbb{L}F \approx 5 \cdot 10^{-4} \ll 1$ ), – не учитывается; использован линейный коррелятор вместо ML-детектора с обелением; выполнен переход от дискретной энергии  $\|gk\|^2 = \sum |gk[n]|^2$  к непрерывной  $E_k = \|gk\|^2 / Fd$ .

В данном случае, вероятность ошибки зависит от двух источников: шума (через  $\chi$ ) и остаточной МСИ (через  $Z - \mathbb{L}$ ). Полное выражение  $Pe = f(\chi, Z)$ . Однако при  $|\varepsilon k| / (\sigma \sqrt{\varphi k}) < 10^{-2}$  вклад МСИ пренебрежимо мал, и формула (12) определяется только  $\chi$ .

Для принятия решения, при  $\hat{A}k \geq 0$  символ оценивается как +1, иначе как -1. Вероятность ошибки для  $k$ -го бита при  $ak = +1$ :

$$Pe(k) = P(\eta k < -1) = Q(1 / \sqrt{(\sigma^2 \cdot \varphi k)}), \quad (10)$$

где:  $Q(\cdot)$  –  $Q$ -функция Гаусса,  $Q(x) = (1/2) \cdot \text{erfc}(x/\sqrt{2})$ .

Перейдём к нормированным энергетическим параметрам. Обозначим  $E_k = \|gk\|^2 / Fd$  – энергию  $k$ -й синтезирующей базисной функции, а  $E_b = E_k$  при единичной амплитуде символа – энергию на бит. С учётом модели дискретного шума введём коэффициент биортогональных потерь:

$$\chi k = \|gk\|^2 \cdot \|gak\|^2, \quad (11)$$

где:  $\|gk\|^2$  – квадрат нормы  $k$ -й синтезирующей базисной функции (пропорционален энергии излучаемого символа);  $\|gak\|^2 = \varphi k$  – квадрат нормы  $k$ -й анализирующей базисной функции (определяет шумовое усиление).

Подставляя выражение для  $\sigma^2 = N_0 \cdot Fd/2$  и выражение (11) в (10), получаем формулу BER, усреднённую по  $m$  символам (при равных  $\chi k = \chi$ ):

$$Pb = Q(\sqrt{2Eb / (N_0 \cdot \chi)}), \quad (12)$$

где:  $Eb$  – энергия сигнала на один бит;  $N_0$  – спектральная плотность мощности шума;  $\chi$  – коэффициент биортогональных потерь.

Нижняя граница потерь рассчитана из неравенства Коши–Буняковского и из условия биортогональности  $gak^T \cdot gk = Zkk = 1$  следует:

$$\chi k = \|gk\|^2 \cdot \|gak\|^2 \geq 1, \quad (13)$$

Равенство  $\chi k = 1$  достигается тогда и только тогда, когда  $gak = cgk$  (базисы параллельны), то есть приёмник является согласованным фильтром. В этом случае формула (12) точно совпадает с теоретической кривой BPSK:

$$Pb|\chi=1 = Q(\sqrt{2Eb/N_0}), \quad (14)$$

Физический смысл  $\chi > 1$ : использование аналитического базиса, отличного от согласованного фильтра, вносит потери  $\Delta = 10 \lg(\chi)$  дБ в энергетический бюджет канала, что графически выражается в сдвиге кривой BER вправо (рис. 1).

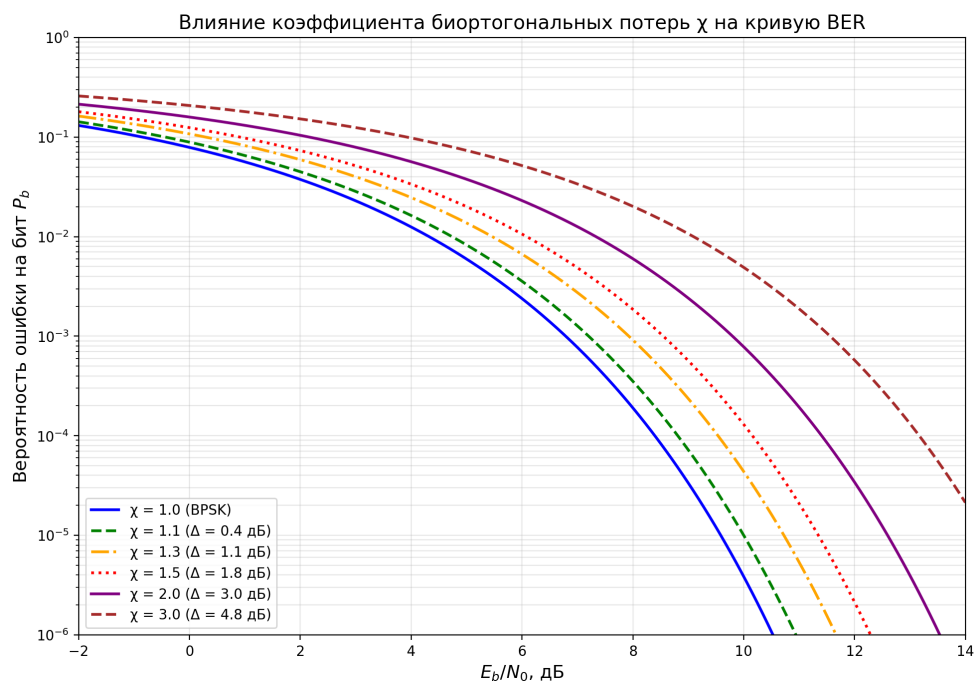


Рис. 1. Влияние коэффициента биортогональных потерь  $\chi$  на кривую BER. Сдвиг вправо составляет  $\Delta = 10\lg(\chi)$  дБ

Формула (12) не содержит частоту дискретизации  $Fd$ , поскольку при определении  $Eb = \|gk\|^2/Fd$  и  $\sigma^2 = N_0 \cdot Fd/2$  частота дискретизации сокращается. Таким образом, при корректном определении  $Eb$  как энергии в полосе сигнала изменение  $Fd$  при фиксированных  $f_v$  и  $Eb$  не влияет на BER. Коррелятор (3) эффективно подавляет шум за пределами полосы сигнала, но этот факт уже учтён в формуле через коэффициент  $\chi$ .

### Заключение

Работа формализует применение линейного корреляционного приёмника к специфическому базису финитных функций, синтезированному автором ранее. Ключевое отличие от существующих систем: OFDM использует прямоугольное временное окно с *sinc*-спектром, бесконечным по частоте (в реальных системах применяются оконные функции и фильтрация для подавления боковых лепестков, однако спектральная утечка полностью не устраняется); при наличии циклического префикса (CP) ортогональность поднесущих OFDM сохраняется

для задержек, не превышающих длину СР. Классический ряд Котельникова (*sinc*-базис) имеет строго ограниченный спектр, но бесконечен во времени; при усечении на конечном интервале возникают ошибки восстановления и потеря ортогональности, что делает его непригодным для реализации нулевой МСИ на конечном интервале. Предложенный базис обладает одновременно финитностью по времени и ограничением спектра – сочетание, недостижимое для *sinc*-базиса. При этом ортогональность достигается с точностью  $\|Z - I\|F \approx 10^{-3}$ , что обеспечивает пренебрежимо малую МСИ.

Основные результаты:

1. Разработана матричная модель линейного корреляционного приёмника (3)–(4), описывающая демодуляцию сигналов на основе ортогонального базиса финитных функций.

2. Доказана теорема о нулевой МСИ при  $Z = Im$ . Для синтезированного базиса ( $Z \approx I$ ) количественная оценка остаточной МСИ ( $\|Z - Im\|F \approx 1,26 \cdot 10^{-3}$ , пример  $m = 8$ ) подтвердила её пренебрежимость ( $\|\varepsilon\|/\sigma < 0,8 \%$ ).

3. Получено приближённое замкнутое выражение BER:  $P_b \approx Q(\sqrt{2Eb/(N_0 \cdot \chi)})$ . Из неравенства Коши–Буняковского доказано  $\chi \geq 1$ , причём  $\chi = 1$  на согласованном фильтре. Приближение основано на четырёх обоснованных допущениях: пренебрежение остаточной МСИ ( $Z \approx I$ ), слабая корреляция шума ( $\Phi \approx I$ ), субоптимальность линейного коррелятора (без обеления), стандартная дискретизация (без алиасинга). Строго,  $Pe = f(\chi, Z)$ , но при  $|\varepsilon k|/(\sigma \sqrt{\phi k}) < 10^{-2}$  вклад МСИ пренебрежим.

4. Смещение при  $\chi > 1$  составляет  $\Delta = 10 \cdot \lg(\chi)$  дБ (Рис. 1). Формула BER инвариантна к частоте дискретизации  $Fd$  при корректном определении энергии на бит  $Eb$ .

Дальнейшие исследования предполагают: разработку метода тактовой синхронизации; верификацию аналитических результатов методом Монте-Карло; анализ оптимального ML-детектора с обелением для биортогонального случая и оценку выигрыша по сравнению с линейным коррелятором.

### Список литературы

1. Ходаковский В. А., Коротченко В. Д. Синтез ортогонального базиса на конечном временном интервале для цифровой обработки сигналов с ограниченным спектром // Интеллектуальные технологии на транспорте. – 2025. – № 2 (42). – С. 71-82.
2. Коротченко В.Д. Модели синтеза ортогональных базисных функций на основе характеристик идеального полосового фильтра // Электронный научный журнал «Век качества». – 2026. – № 1. – С. 249-263. – Режим доступа: <https://www.agequal.ru/pdf/2026/126013.pdf> (доступ свободный).
3. Волчков В.П. Сигнальные базисы с хорошей частотно-временной локализацией // Электросвязь. – 2007. – № 2. – С. 21-25.
4. Гришенцев А.Ю. Метод синтеза алфавитов ортогональных сигнальных широкополосных сообщений // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2018. – Т. 18, № 6. – С. 1074-1083.
5. Вершинин В.А. Передача двоичных сообщений ортогонализированными сигналами на основе матрицы Адамара при импульсной помехе // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – № 10. – DOI: 10.30898/1684-1719.2025.10.13.
6. Лобеев Д.П. Особенности методики и модели проектирования технологических сетей радиосвязи LTE-1800 TDD в условиях высокоскоростного движения // Электронный научный журнал «Век качества». – 2026. – № 1. – С. 235-249. – Режим доступа: <https://www.agequal.ru/pdf/2026/126013.pdf> (доступ свободный).

## **Mathematical Model of Correlation Reception of Signals Based on an Orthogonal Basis of Finite-Duration Functions in an Additive White Gaussian Noise Channel**

***Korotchenko Vladislav Dmitrievich,***

*Postgraduate student of the Department of Electrical Communications  
Emperor Alexander I Petersburg State University of Railway Engineering  
190031, St. Petersburg, Moskovsky Ave., 9  
[vladis147@mail.ru](mailto:vladis147@mail.ru)*

A formal mathematical model of the demodulation process for information signals synthesized using an orthogonal basis of finite-duration functions is developed. The receiver is described as a linear matrix correlator, and it is shown through its cross-correlation matrix that the intersymbol interference (ISI) is negligibly small. Approximate closed-form analytical expressions for the bit error probability are derived for various basis dimensions. A biorthogonal loss coefficient is introduced that analytically explains the deviation of the BER curve from the theoretical BPSK bound.

**Keywords:** orthogonal basis; finite-duration functions; correlation receiver; intersymbol interference; BER; BPSK; AWGN channel.